Sorozatok

5. előadás

Farkas István

DE ATC Gazdaságelemzési és Statisztikai Tanszék

A sorozat definíciója

Definíció. A természetes számok halmazán értelmezett valós értékű

$$a\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$$

függvényt *valós számsorozatnak* (röviden sorozatnak) nevezzük.

Megjegyzés. Az a sorozat n helyen felvett *helyettesítési értékét*, amit az a sorozat n-edik tagjának (elemének) nevezünk, a_n-nel jelöljük.

A sorozat jelölésére az (a_n) szimbólumot használjuk.

A sorozat megadása

A sorozatokat általában explicit módon adjuk meg. Ez azt jelenti, hogy képlettel megadjuk az általános, n-edik tagot.

Példa.

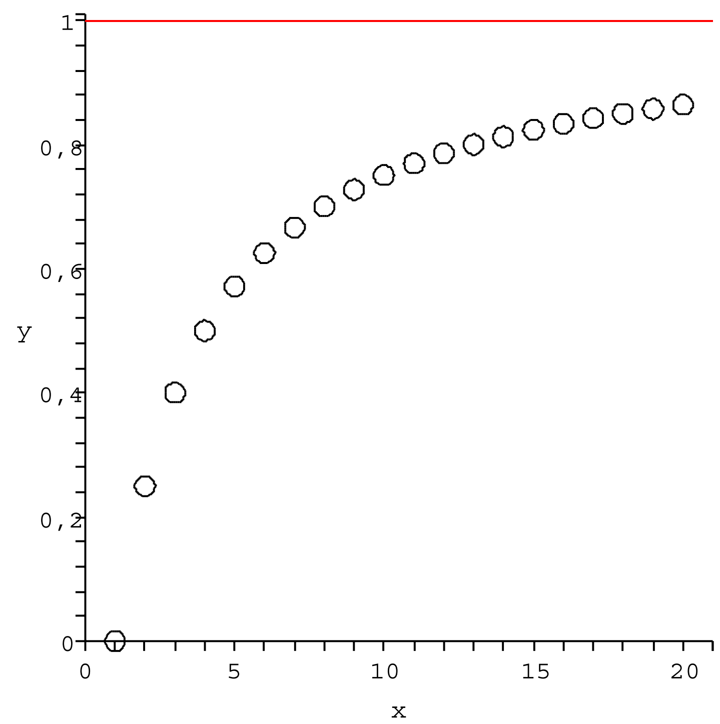
$$a_n = 5 - 2n^2$$

$$b_n = \frac{1}{n^3}$$

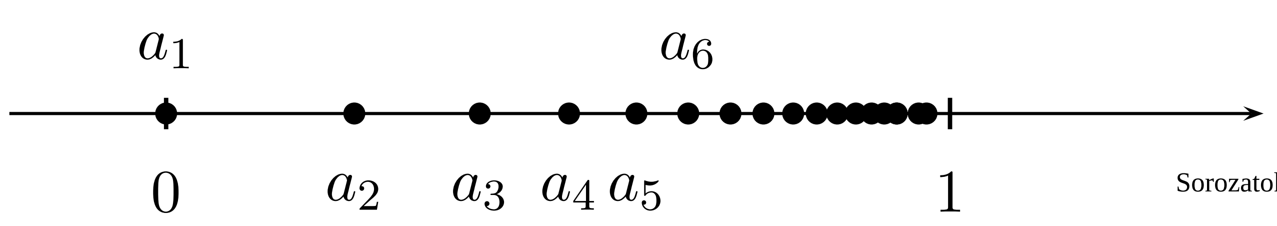
$$c_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n}$$

Sorozatok szemléltetése

- Koordinátarendszerben. $\left(a_n = \dfrac{n-1}{n+2}\right)$



- A sorozat tagjait számegyenesen is megjelölhetjük.



Sorozatok tulajdonságai

Mivel a sorozat is egy speciális függvény, ezért a függvényeknél tanult tulajdonságokat itt is megvizsgálhatjuk. Ezek a következők:

- Monotonitás,
- korlátosság,
- szélsőérték.

Monotonitás

Definíció.

- Az (a_n) sorozatot *monoton növőnek* nevezzük, ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén fennáll, hogy $a_n \leq a_{n+1}$.
- Az (a_n) sorozatot *szigorúan monoton növőnek* nevezzük, ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén fennáll, hogy $a_n < a_{n+1}$.
- Az (a_n) sorozatot *monoton csökkenőnek* nevezzük, ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén fennáll, hogy $a_n \geq a_{n+1}$.
- Az (a_n) sorozatot *szigorúan monoton csökkenőnek* nevezzük, ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén fennáll, hogy $a_n > a_{n+1}$.

A monotonitás kiszámítása

Feladat. Döntsük el, hogy az $a_n = \frac{n-1}{n+2}$ sorozat, a monotonitást tekintve, milyen tulajdonságú?

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)-1}{(n+1)+2} - \frac{n-1}{n+2} = \frac{n}{n+3} - \frac{n-1}{n+2} =$$

$$= \frac{n\cdot(n+2) - (n-1)\cdot(n+3)}{(n+3)\cdot(n+2)} =$$

$$= \frac{(n^2+2n) - (n^2+3n-n-3)}{(n+3)\cdot(n+2)} =$$

$$= \frac{3}{(n+3)\cdot(n+2)} > 0.$$

Azaz: $a_{n+1} - a_n > 0$, amit átrendezve:

$$a_{n+1} > a_n.$$

A sorozat szigorúan monoton növő.

Korlátosság

Definíció.

- Az (a_n) sorozatot *alulról korlátos*nak mondjuk, ha értékkészlete alulról korlátos, azaz létezik $k \in \mathbf{R}$ úgy, hogy $k \leq a_n$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén.
- Az (a_n) sorozatot *felülről korlátos*nak mondjuk, ha értékkészlete felülről korlátos, azaz létezik $K \in \mathbf{R}$ úgy, hogy $K \geq a_n$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén.
- Az (a_n) sorozat *korlátos*, ha alulról és felülről is korlátos.

Megjegyzés.
Ha egy sorozat monoton növő, akkor alulról korlátos, és az egyik alsó korlátja a sorozat első tagja.
Ha egy sorozat monoton csökkenő, akkor felülről korlátos, és egyik felső korlátja a sorozat első tagja.

Definíció.

1. Az (a_n) alulról korlátos sorozat *legnagyobb alsó korlátját* az (a_n) sorozat pontos alsó korlátjának vagy infimumának mondjuk. Jele: $\inf a_n$.
2. Az (a_n) felülről korlátos sorozat *legkisebb felső korlátját* az (a_n) sorozat pontos felső korlátjának vagy suprémumának mondjuk. Jele: $\sup a_n$.

Szélsőérték

Definíció.

- Az (a_n) sorozat *minimuma* a sorozatnak az az a_{m_0} tagja, amelyre minden $n \in \mathbf{N}$ esetén teljesül, hogy $a_{m_0} \leq a_n$.
- Az (a_n) sorozat *maximuma* a sorozatnak az az a_{m_0} tagja, amelyre minden $n \in \mathbf{N}$ esetén teljesül, hogy $a_{m_0} \geq a_n$.

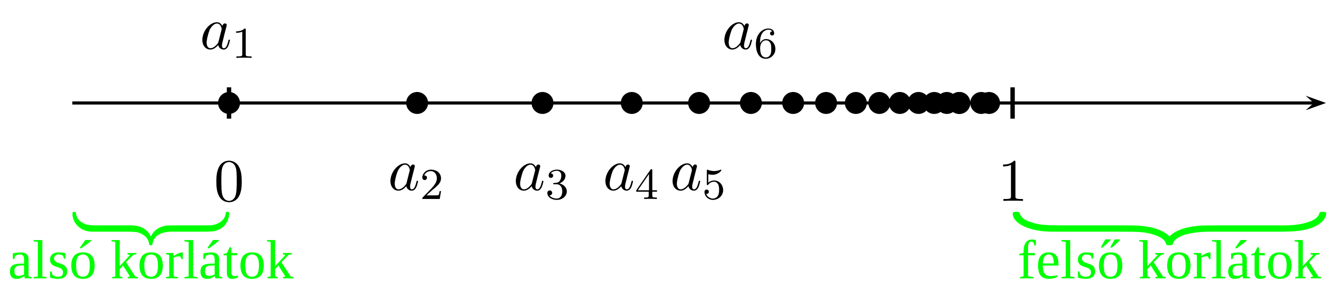
Megjegyzések.

- Legyen az $\inf a_n = k_0$. Amennyiben van olyan eleme a sorozatnak, amely éppen k_0, akkor ez azt jelenti, hogy a sorozatnak van minimuma.
- Legyen a $\sup a_n = K_0$. Amennyiben van olyan eleme a sorozatnak, amely éppen K_0, akkor ez azt jelenti, hogy a sorozatnak van maximuma.

Korlátosság és szélsőérték kiszámítása

Feladat. Jellemezzük az $a_n = \frac{n-1}{n+2}$ sorozatot korlátosság és szélsőérték szempontjából!

$$0 \leq \frac{n-1}{n+2} = \frac{(n+2)-3}{n+2} = 1 - \frac{3}{n+2} < 1.$$



$$\inf a_n = 0,$$

$$\sup a_n = 1,$$

$$\min a_n = 0,$$

$$\max a_n : \text{nincs.}$$

Sorozatok konvergenciája

Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat *konvergens* és *határértéke* az $A \in \mathbf{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N \in \mathbf{N}$ (ε-tól függő) szám úgy, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$ minden $n > N$ esetén.

Azt, hogy az (a_n) sorozat határértéke az A szám, így jelöljük: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, és így olvassuk: „limesz n tart a végtelenbe a_n egyenlő A”.

A $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ jelölés mellett szokás még alkalmazni az $a_n \to A \quad (n \to \infty)$ jelölést is, amit így olvasunk ki: „az a_n tart az A-hoz”.

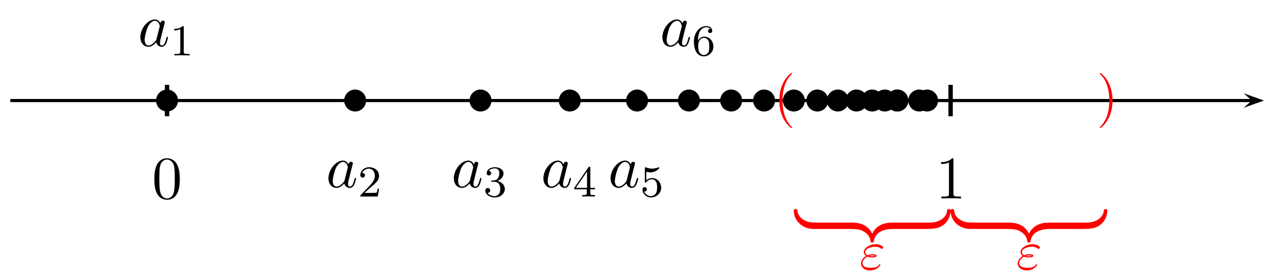
Megjegyzések.

- Az $|a_n - A| < \varepsilon$ egyenlőtlenség azt jelenti, hogy $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$, azaz az a_n az $]A - \varepsilon, A + \varepsilon[$ nyílt intervallumban, vagyis A-nak az ε sugarú környezetében van. Az (a_n) sorozat konvergenciája azt jelenti, hogy létezik olyan $A \in \mathbf{R}$ szám, amelynek minden környezete olyan, hogy azon kívül a sorozatnak csak véges sok eleme, azon belül pedig végtelen sok eleme van.
- A definícióban szereplő ε pozitív számot *hibakorlát*nak, az N számot az ε-hoz tartozó *küszöbindex*nek nevezzük.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

Küszöbszám keresés

Feladat. Határozza meg, hogy az $a_n = \frac{n-1}{n+2}$ sorozat elemei, hányadik tagtól kezdve esnek a határérték $\varepsilon = 10^{-2}$ sugarú környezetén belülre!



$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{n-1}{n+2} - 1\right| < \frac{1}{100},$$

Küszöbszám keresés

$$\left|\frac{(n-1)-(n+2)}{n+2}\right| < \frac{1}{100},$$

$$\left|\frac{-3}{n+2}\right| < \frac{1}{100},$$

$$\frac{3}{n+2} < \frac{1}{100},$$

$$300 < n+2,$$

$$298 < n.$$

A sorozat elemei a 299. tagtól kezdve esnek a határérték ε sugarú környezetén belülre.

Konvergencia, korlátosság, monotonitás kapcsolata

Tételek.

- A határérték mindig egyértelmű.
- Minden konvergens sorozat korlátos.
- Ha az (a_n) sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, akkor konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup(a_n)$.
- Ha az (a_n) sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf(a_n)$.

Határértékre vonatkozó tételek

- **Tétel.** Legyen (a_n), (b_n) konvergens sorozat. Ekkor az $(a_n + b_n)$ is konvergens sorozat és

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

- **Tétel.** Legyenek az (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok. Ekkor $(a_n \cdot b_n)$ is konvergens sorozat és

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right).$$

- **Tétel.** Legyenek az (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Ekkor az $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat is konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

- **Tétel.** Legyen az (a_n) sorozat konvergens és $\lambda \in \mathbf{R}$. Ekkor a $(\lambda \cdot a_n)$ sorozat is konvergens sorozat és

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda \cdot a_n) = \lambda\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right).$$

A végtelen, mint határérték

- **Definíció.** Az (a_n) sorozat a $+\infty$-be divergál, ha minden $K \in \mathbf{R}$ esetén létezik $N \in \mathbf{N}$ (K-tól függő) küszöbindex, hogy $a_n > K$ minden $n > N$-re. Jele: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
- **Definíció.** Az (a_n) sorozat a $-\infty$-be divergál, ha minden $k \in \mathbf{R}$ esetén létezik $N \in \mathbf{N}$ (k-tól függö) küszöbindex, hogy $a_n < k$ minden $n > N$-re. Jele: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Nevezetes határértékek

- $$\lim_{n\to\infty} c^n = \begin{cases} \infty, & \text{ha } c > 1 \\ 1, & \text{ha } c = 1 \\ 0, & \text{ha } -1 < c < 1 \end{cases}$$

- $$\lim_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} \infty, & \text{ha } q > 0,\ q \in \mathbf{Q} \\ 1, & \text{ha } q = 0 \\ 0, & \text{ha } q < 0,\ q \in \mathbf{Q} \end{cases}$$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$, ha $c > 0$.

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

- $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

- $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n = e^c.$$